Examen d'Algèbre linéaire 2 2022-2023

Exercice 1 :

$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et $\mathbb{C}_n[x]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients complexes.

1. Soient n ϵ $\mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ et $E = \mathbb{C}_n[x]$. Soit $\varphi_a : E \to \mathbb{C}, P \to P(a)$.
   Montrer que $\varphi_a \in E^*$ (dual de E).
2. Soient $a_0, a_1, .. , a_n$ n + 1 nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille $(\varphi_{a_0}, \ldots, \varphi_{a_n})$ est une base de E^* et déterminer sa préduale.
   (Indication : utiliser la base canonique de $\mathbb{C}_n[x]$ pour 2).

Exercice 2 :

Soit n ϵ $\mathbb{N}$ tel que n $\geq$ 2 et soit E = $\mathbb{R}_n[x]$ l'anneau des polynômes de degré inférieur ou égal à n coefficients réels.

Soit H = $\{P \in E \text{ tel que } P(0) = P'(0) = 0\}$

1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.
2) Montrer que $P \in H \Leftrightarrow (X-1)^2$ *divise* P.
3) Donner une base de H ainsi que sa dimension.

Exercice 3 :

Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ et T = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ deux matrices de $M_3(\mathbb{R})$.

1) Montrer qu'il existe deux matrices : D diagonale et N nilpotente telles que $T = D + N$ et $DN = ND$.
2) Calculer e^T et T^n , n ϵ $\mathbb{N}^*$.
3) Déterminer une matrice P inversible de $M_3(\mathbb{R})$ telle que A = PTP^{-1}
4) Calculer e^A et A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

POLYEXAM237