EXAMEN Séries 2022/2023

1. Soit $p \geq 1$ un entier. On considéré la série numérique $\left\{\frac{1}{n(n+1)...(n+p)}\right\}$ et on pose $S(p)$ sa somme.
   a. Montrer que cette série converge.
   b. Montrer que $\frac{1}{n(n+1)...(n+p)} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{n(n+1)...(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)...(n+p)}\right]$.
   c. En déduire la valeur de $S(p)$.

2. On pose $u_n = e^{-nx}\sin(nx)\ avec\ x \in \mathbb{R}_+$.
   a. Etudier la convergence simple de la suite de fonction $(u_n)\ sur\ [0, +\infty[$.
   b. Etudier la convergence uniforme $[a, +\infty[, a > 0$.
   c. Etudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

3. Soit $\alpha \in]0, +\infty[\ et\ \{u_n\}$ une suite $u_n = \frac{(-1)^n}{\alpha n+1}$.
   a. Détermine la valeur de l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha n} dt$.
   b. Montrer que la série de terme général u_n est convergente et que
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^2 \frac{dt}{1+t^2}.$$
   c. En déduire : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

4. Développer en série entière les fonctions suivantes :
   a. $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ b. $g(x) = \frac{1}{1+x+2x^3}$

5. Soit f la fonction paire, de période 2π, égale a $(\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$.
   a. Calculer les coefficients de Fourier de f.
   b. Montrer que la série de Fourier de f converge simplement vers $f\ sur\ \mathbb{R}$.
   c. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, Calculer également $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

BOUTEXAM237